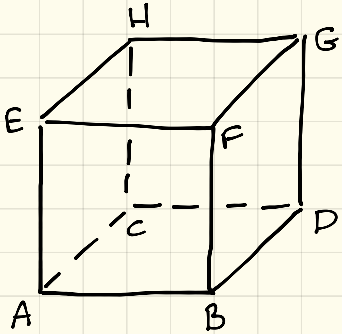
$\boxed{1}$

Skizze



Gegeben

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{OE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{OH} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{EH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{EH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{EH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung

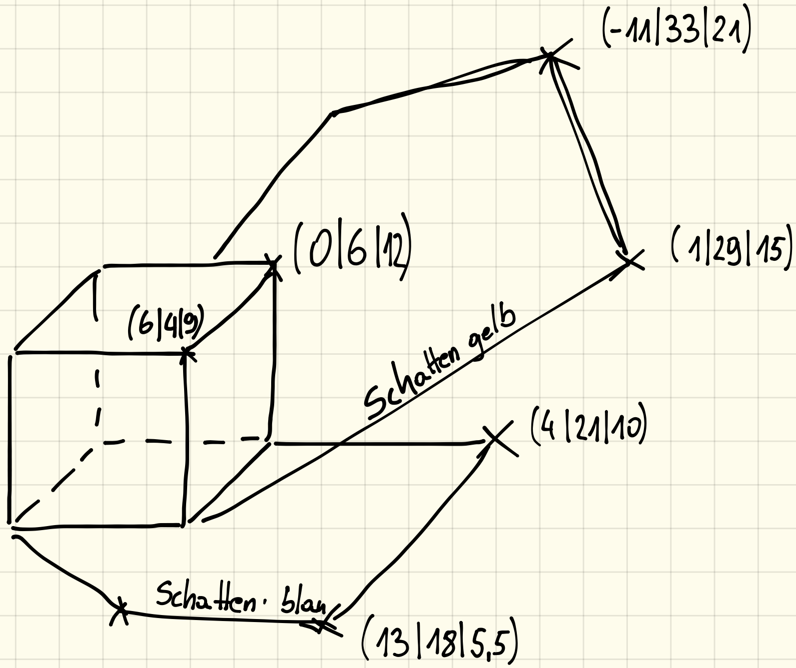
$$\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EH} = \vec{OH} - \vec{OE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II

Idee Finde je zwei Lichtstrahlen die zu den Lampen gehören

Skizze



Zwei Geraden, auf den zwei Lichtstrahlen der gelben Lichtquelle liegen, werden von den Punkten (6|4|9) und (13|18|5,5) bzw (4|21|10) und (0|6|12) bestimmt

Zwei Geraden, auf den zwei Lichtstrahlen der blauen Lichtquelle liegen, werden von den Punkten (6|4|9) und (1|29|15) bzw (-11|33|21) und (0|6|12) bestimmt

g_1 Gerade durch die Punkte $(6|4|9)$ und $(13|18|5{,}5)$

g_2 Gerade durch die Punkte $(0|6|12)$ und $(4|21|10)$

$g_1\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ $\qquad g_2\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt von g_1 und g_2 $\quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}} \begin{matrix} r = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$

Ortsvektor der gelben Lampe $\quad \overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-14 \\ 4-28 \\ 9+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ 16 \end{pmatrix}$

h_1 Gerade durch die Punkte $(6|4|9)$ und $(1|29|15)$

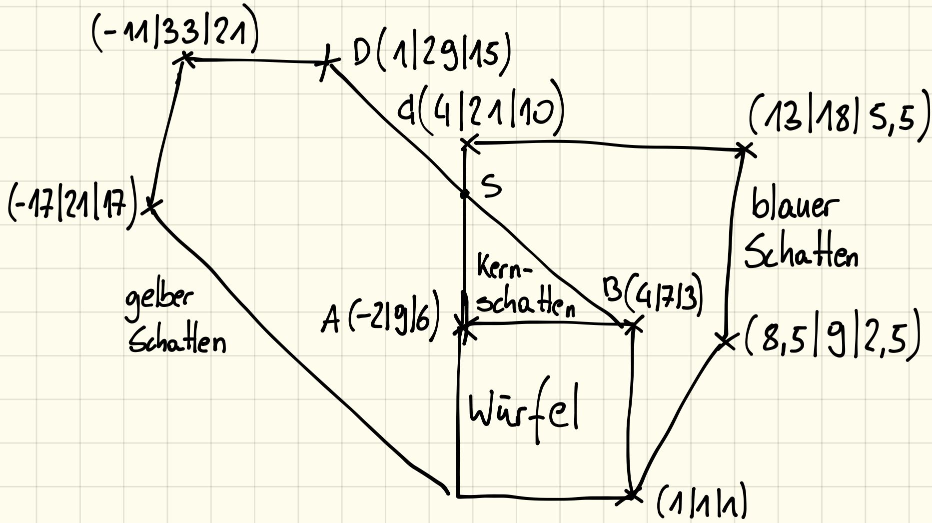
h_2 Gerade durch die Punkte $(0|6|12)$ und $(-11|33|21)$

$h_1\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ $\qquad h_2\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt von h_1 und h_2 $\quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}} \begin{matrix} r = -1 \\ s = -1 \end{matrix}$

Ortsvektor der blauen Lampe $\quad \overrightarrow{OL_b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5 \\ 4-25 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -21 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{III}$ Skizze



Der Kernschatten ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, S
Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$

- Bestimmung der Koordinaten von S

$g_1 \; \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ (Gerade durch A und C)

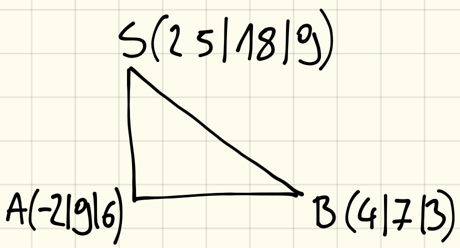
$g_2 \; \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ (Gerade durch B und D)

g_1 und g_2 gleichsetzen

$$\begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}} \begin{matrix} r = \frac{3}{4} \\ s = \frac{1}{2}\end{matrix} \quad \to \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5\\18\\9\end{pmatrix}$$

S(2,5|18|9)

- Bestimmung des Flächeninhalts



Der Kernschatten scheint rechtwinklig zu sein

Die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ werden auf Orthogonalität überprüft

$$\overrightarrow{AS}\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4,5\ 6 - 2\ 9 - 3\ 3 = 27 - 18 - 9 = 0$$

$\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind orthogonal

Flächeninhalt

$$F_{ABS} = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AS}|\ |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}\ \sqrt{(4,5)^2 + 9^2 + 3^2}\ \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$$

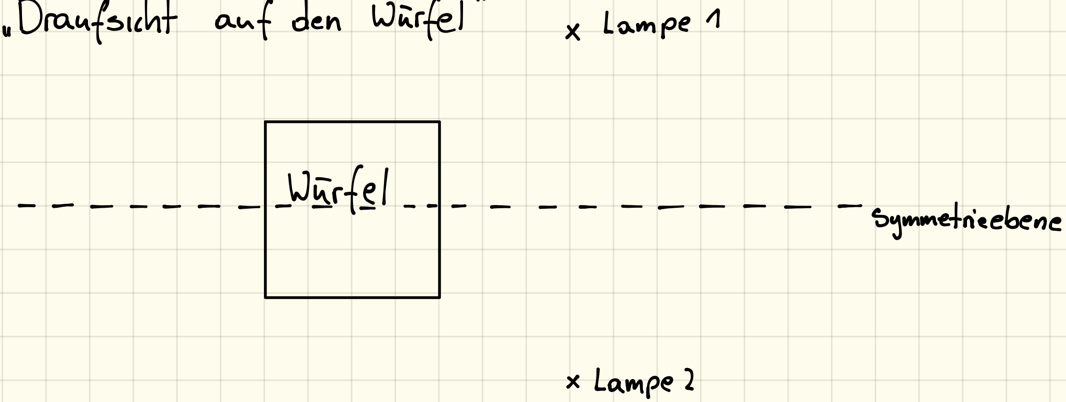
$$= \frac{1}{2}\sqrt{20,25 + 81 + 9}\ \sqrt{36 + 4 + 9}$$

$$= \frac{1}{2}\ 10\ 5\ \ 7 = 36,75\ (cm^2)$$

$\boxed{IV}$ Es gibt unendlich viele Lösungen

Idee: Platziere die Lampe „symmetrisch" um den Würfel

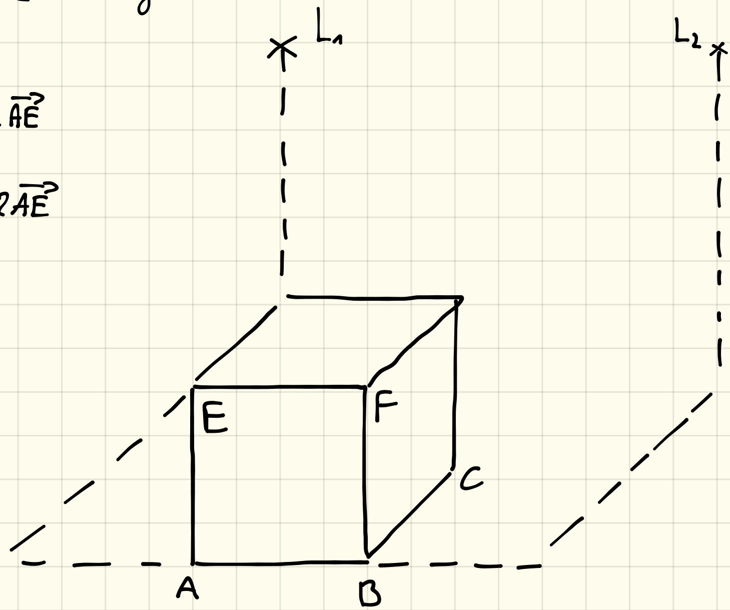
„Draufsicht auf den Würfel"



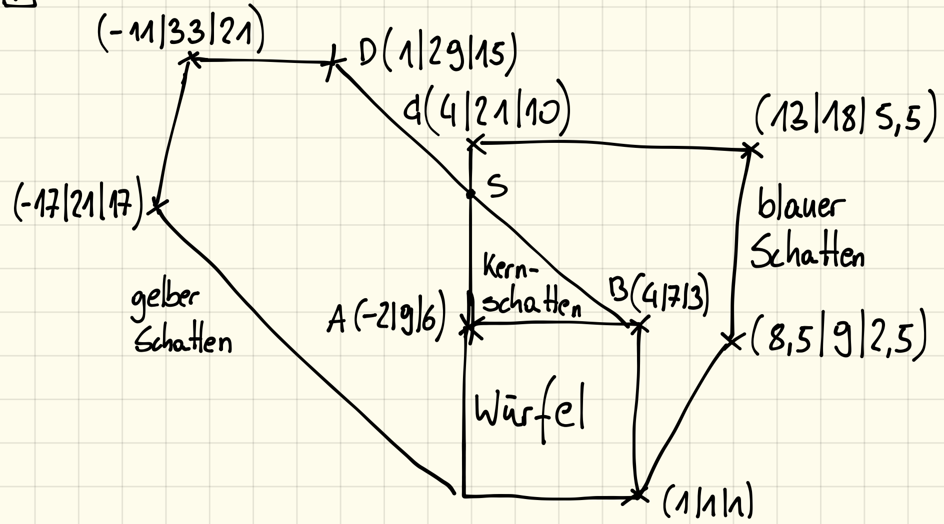
3D-Sicht → Mögliche Lösung

$\vec{OL_1} = \vec{OA} - \vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{AE}$

$\vec{OL_2} = \vec{OB} + \vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{AE}$



$\boxed{V}$



Der Kernschatten ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, S
Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$

- Bestimmung der Koordinaten von S

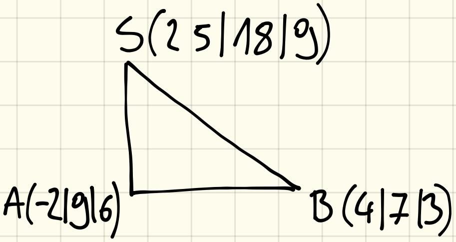
$g_1\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$ (Gerade durch A und C)

$g_2\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ (Gerade durch B und D)

g_1 und g_2 gleich setzen

$$\begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}} \begin{matrix}r = \frac{3}{4}\\ s = \frac{1}{2}\end{matrix} \quad \rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\22\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5\\18\\9\end{pmatrix}$$

S(2,5|18|9)

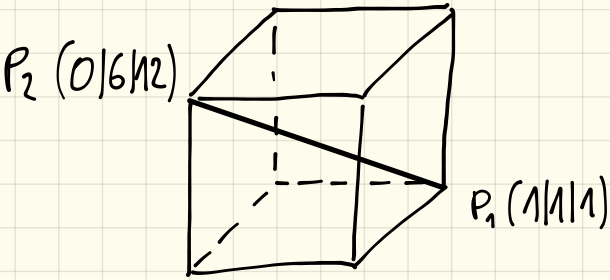


Die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ werden auf Orthogonalität überprüft

$$\overrightarrow{AS}\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4{,}5\ 6 - 2\ 9 - 3\ 3 = 27 - 18 - 9 = 0$$

$\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind orthogonal

VI



Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist eine Raumdiagonale des Würfels Der Punkt S mit dem Ortsvektor

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{P_1P_2}$ liegt daher im Schwerpunkt des Würfels Formulieren Sie eine Frage nach dem Schwerpunkt des Würfels

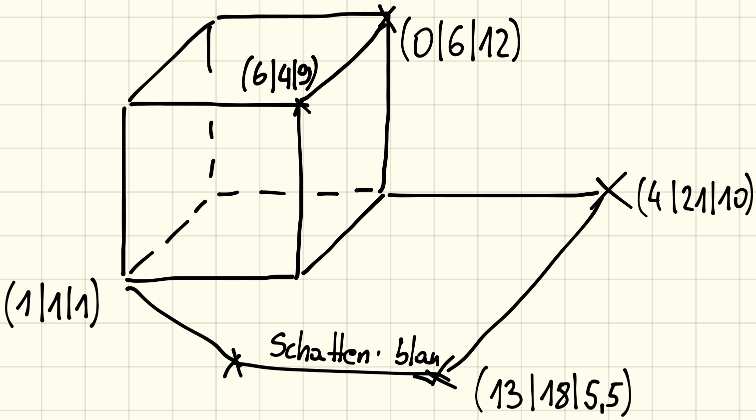
z B „Bestimmen Sie die Koordinaten, des Schwerpunktes von dem Zauberwürfel"

VII Es gibt unendlich viele Lösungen Es müssen folgende Schritte unternommen werden

- Parametergleichung der Ebene aufstellen, in der die Platte liegt

- Die Position der Lampe bestimmen

- Die Parametergleichung eines Lichtstrahles aufstellen Als ein Richtungsvektor kann einer der Spannvektoren verwendet werden Als Stützvektor kann der Ortsvektor der Lampe verwendet werden



- Ebenengleichung

Die Punkte (1|1|1), (13|18|5,5), (4|21|10) liegen in der gesuchten Ebene E

$$E\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}12\\17\\4{,}5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\20\\9\end{pmatrix}\quad, r,s\in\mathbb{R}$$

- Ortsvektor der gelben Lampe

Zwei Geraden, auf den zwei Lichtstrahlen der gelben Lichtquelle liegen, werden von den Punkten (6|4|9) und (13|18|5,5) bzw (4|21|10) und (0|6|12) bestimmt

g_1 Gerade durch die Punkte (6|4|9) und (13|18|5,5)

g_2 Gerade durch die Punkte (0|6|12) und (4|21|10)

g_1 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3,5 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ g_2 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

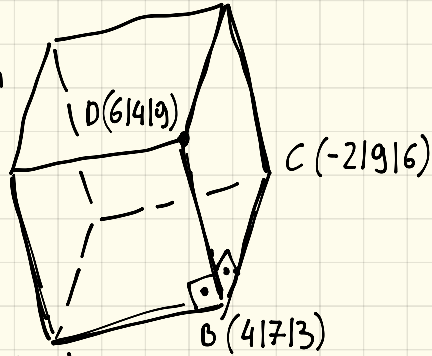
Schnittpunkt von g_1 und g_2 $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}}$ $r = -2$, $s = -2$

Ortsvektor der gelben Lampe $\overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 14 \\ 4 - 28 \\ 9 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ 16 \end{pmatrix}$

- Parametergleichung eines Lichtstrahles l

l $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$ $t \geq 0$ (da es sich um einen Strahl handelt)

VIII Es gibt unendlich viele Lösungen



Die Punkte A, B, C liegen in der gesuchten Ebene E

$$E \quad \vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC} \quad , \; r,s \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix}$$

Da es sich um einen Würfel handelt, muss der Vektor $\vec{BD}$ orthogonal zu den Spannvektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sein. Es gilt

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$$

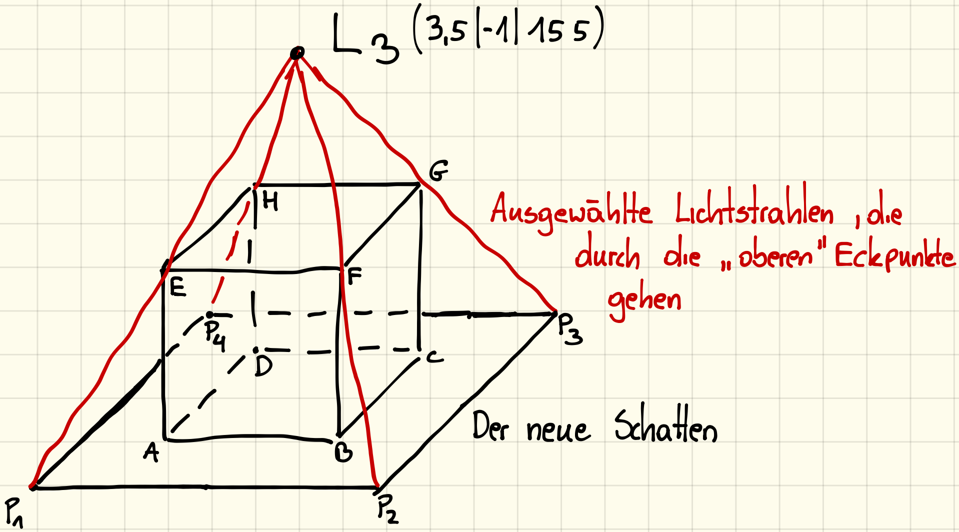
und $\quad \vec{BD}\;\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} = 2\,3 - 3\,6 + 6\,2 = 6 - 18 + 12 = 0$

$$\vec{BD}\;\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix} = -2\,3 - 3\,8 + 6\,5 = -6 - 24 + 30 = 0$$

Damit ist $\vec{BD}$ ein Normalenvektor zur Ebene E

ZUSATZ. Multipliziert man den Vektor $\vec{BD}$ mit einem Skalar (einer Zahl) $t \neq 0$, so erhält man einen neuen Vektor, der zur E orthogonal ist. Ein Normalenvektor ist daher nicht eindeutig

IX



A(1|1|1), B(4|7|3), C(-2|9|6), D(-5|3|4)

E(3|-2|7), F(6|4|9), G(0|6|12), H(-3|0|10)

Idee

- Stelle die Ebenengleichung auf $E\ \vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AD}$, $r,s \in \mathbb{R}$

- Stelle die Geradengleichungen auf

  $g_1\ \vec{x} = \vec{OL_3} + t\vec{L_3E}$, $g_2\ \vec{x} = \vec{OL_3} + t\vec{L_3F}$

  $g_3\ \vec{x} = \vec{OL_3} + t\vec{L_3G}$, $g_4\ \vec{x} = \vec{OL_3} + t\vec{L_3H}$ $t \in \mathbb{R}$

- Bilde die Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mit der Ebene E und benenne sie P_1, P_2, P_3, P_4

- Überprüfe, ob das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Qudrat ist

- Ebenengleichung E $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Geradengleichungen

$$g_1 \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ -8,5 \end{pmatrix}, \quad g_2 \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -6,5 \end{pmatrix}$$

$$g_3 \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3,5 \\ 7 \\ -3,5 \end{pmatrix}, \quad g_4 \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6,5 \\ 1 \\ -5,5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- P_1 Schittpunkt von E und g_1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ -8,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{GTR} \begin{matrix} r = -0,5 \\ s = -0,5 \\ t = 2 \end{matrix}$$

$$\vec{OP_1} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ -8,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

- P_2 Schittpunkt von E und g_2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -6,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{GTR} \begin{matrix} r = 1,5 \\ s = -0,5 \\ t = 2 \end{matrix}$$

$$\vec{OP_2} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -6,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 9 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

- P_3 Schittpunkt von E und g_3

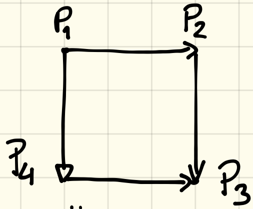
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3,5 \\ 7 \\ -3,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{GTR} \begin{matrix} r = 1,5 \\ s = 1,5 \\ t = 2 \end{matrix}$$

$$\vec{OP_3} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 15,5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3,5 \\ 7 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 13 \\ 8,5 \end{pmatrix}$$

- P_4 Schittpunkt von E und g_4

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1\\15{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6{,}5\\1\\-5{,}5\end{pmatrix} \xrightarrow{GTR} \begin{matrix} r = -0{,}5 \\ s = 1{,}5 \\ t = 2 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1\\15{,}5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-6{,}5\\1\\-5{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9{,}5\\1\\4{,}5\end{pmatrix}$$



- Untersuchung des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$

- Ist die Figur ein Parallelogramm? Falls ja, dann gilt

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}8{,}5\\9\\2{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2{,}5\\-3\\-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_4P_3} = \begin{pmatrix}-3{,}5\\13\\8{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-9{,}5\\1\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix}-9{,}5\\1\\4{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2{,}5\\-3\\-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\4\\6\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix}-3{,}5\\13\\8{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8{,}5\\9\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\4\\6\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$$

↳ Es ist ein Parallelogramm

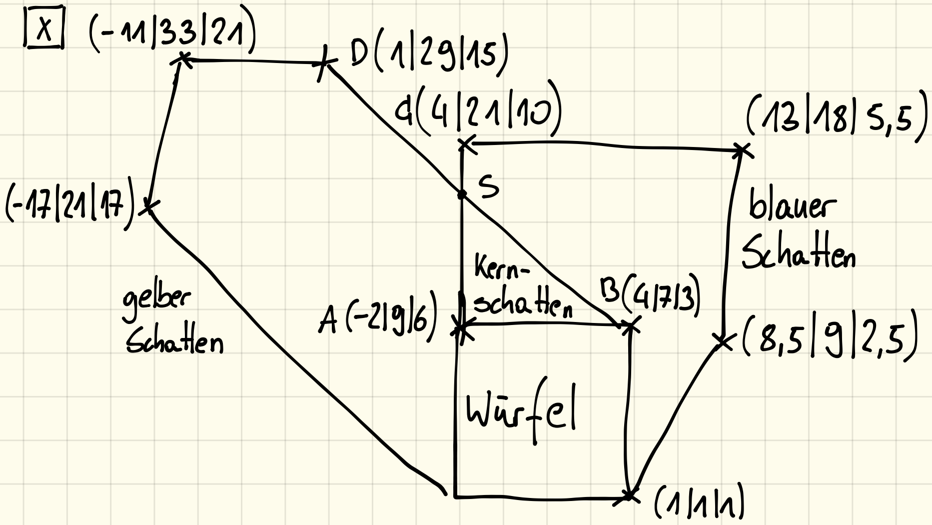
- Ist die Figur eine Raute? Falls ja, dann gilt $|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_2P_3}|$

$$\left.\begin{matrix} |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 144 + 16} = \sqrt{196} = 14 \\ |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 16 + 36} = \sqrt{196} = 14 \end{matrix}\right\} \text{Es ist eine Raute}$$

- Ist die Figur ein Quadrat? Falls ja, dann ist $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_3}$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix}6\\12\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\\4\\6\end{pmatrix} = -6\ 12 + 4\ 12 + 4\ 6 = -72 + 48 + 24 = 0$$

↳ Es ist ein Quadrat



Der Kernschatten ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, S
Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$

- Bestimmung der Koordinaten von S

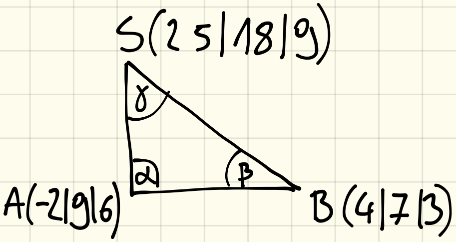
$$g_1\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$ (Gerade durch A und C)

$$g_2\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$ (Gerade durch B und D)

g_1 und g_2 gleich setzen

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{GTR}} \begin{matrix} r = \frac{3}{4} \\ s = \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

S(2,5|18|9)



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AS}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6\ 4{,}5 - 2\ 9 - 9}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2}\ \sqrt{4{,}5^2 + 9^2 + 3^2}}\right) = 90^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BS}}{|\overrightarrow{BA}|\ |\overrightarrow{BS}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6\ (-1{,}5) + 2\ 11 + 3\ 6}{\sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 3^2}\ \sqrt{(-1{,}5)^2 + 11^2 + 6^2}}\right) \approx 56{,}31^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 56{,}31^\circ \approx 33{,}69^\circ$$

$\boxed{XI}$ Gauß-Verfahren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1\\15{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-0{,}5\\-1\\-8{,}5\end{pmatrix}$$

r	s	t		
3	-6	0,5	2,5	| 2 | 2
6	2	1	-2	| (-1) +
2	3	8,5	14,5	| -3 +
3	-6	0,5	2,5	
0	-4	1,5	0,5	| 3
0	-3	9	17	| (-4) +
3	-6	0,5	2,5	
0	-4	1,5	0,5	
0	0	10,5	17,5	

Es wurden nicht alle Einträge in den Zeilen multipliziert

Zusatz

3	-6	0,5	2,5	| 2 | 2
6	2	1	-2	| (-1) +
2	3	8,5	14,5	| (-3) +
3	-6	0,5	2,5	
0	-14	0	7	| 3
0	-21	-24,5	-38,5	| (-2)
3	-6	0,5	2,5	
0	-14	0	7	
0	0	49	98	

$49t = 98 \Rightarrow t = 2$

$-14s = 7 \Rightarrow s = -0{,}5$

$3r - 6(-0{,}5) + 0{,}5 \cdot 2 = 2{,}5 \Rightarrow 3r + 4 = 2{,}5 \Rightarrow 3r = -1{,}5$

$r = -0{,}5$

XII

	Zeit $t=0s$	Zeit $t=1s$
Murmel 1	$P_1(4 \mid 21 \mid 10)$	$R_1(7 \mid 13 \mid 5)$
Murmel 2	$P_2(1 \mid 29 \mid 15)$	$R_2(-2 \mid 23 \mid 13)$

Bahn der Murmel 1 $\quad g_1 \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t\,\overrightarrow{P_1R_1} \qquad t \in \mathbb{R}$ (bzw $t \geq 0$)

$$g_1 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bahn der Murmel 2 $\quad g_2 \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + s\,\overrightarrow{P_2R_2} \qquad s \in \mathbb{R}$ (bzw $s \geq 0$)

$$g_2 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 29 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Einige mögliche Fragen

1) Treffen sich die Murmeln?

2) Schneiden sich die Bahnen? Falls ja, in welchem Punkt bzw unter welchem Winkel?

3) Mit welchem Tempo bewegen sich die Murmeln?

Zu 1)

- Setze g_1 und g_2 gleich Die Murmeln müssen zur selben Zeit am selben Ort sein Es wird daher für beide Parametergleichungen der gleiche Parameter t verwendet

$$\begin{pmatrix}4\\21\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-8\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\29\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-6\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{|\overline{GTR}|} \text{keine Lösung}$$

Die Murmeln treffen sich nicht

Zu 2) Setze g_1 und g_2 gleich

$$\begin{pmatrix}4\\21\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-8\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\29\\15\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\-6\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{|\overline{GTR}|} \begin{matrix}t=-1\\ s=0\end{matrix}$$

Die Bahnen schneiden sich im Punkt P mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\29\\15\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-3\\-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\29\\15\end{pmatrix}$

- Schnittwinkel α

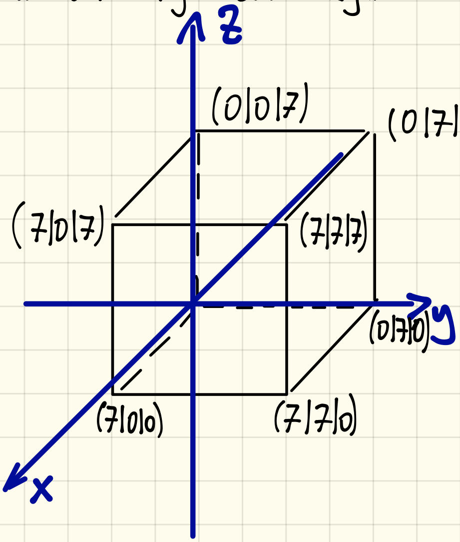
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{P_1R_1} \cdot \overrightarrow{P_2R_2}}{|\overrightarrow{P_1R_1}|\,|\overrightarrow{P_2R_2}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3(-3)+(-8)(-6)+(-5)(-2)}{\sqrt{3^2+(-8)^2+(-5)^2}\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-2)^2}}\right) = 45^\circ$$

Zu 3) $\text{Tempo} = \dfrac{\text{zurückgelegte Strecke}}{\text{verstrichene Zeit}}$

$$\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-2)^2}$$

Tempo Murmel 1 $\dfrac{|\overrightarrow{P_1R_1}|}{1s} \approx 9{,}9\,\frac{cm}{s}$, Tempo Murmel 2 $\dfrac{|\overrightarrow{P_2R_2}|}{1s} = 7\,\frac{cm}{s}$

XIII Würde man das Koordinatensystem so wählen, dass drei Kanten des Zauberwürfels auf den Achsen des Koordinatensystems liegen Dann würden die Schatten und die Platte in der x-y-Ebene liegen



Die Längen und die rechten Winkel hätten direkt gelesen werden können Die Schnittpunkte mit der x-y-Ebene können auch leichter abgelesen werden (z-Koordinate gleich null)