Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:

(a) $f: f(x) = (x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+2)$.

Lösung: Die Nullstellen können direkt abgelesen werden, da die Funktionsgleichung in Form eines Produkts vorliegt. $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = -2$.

(b) $f: f(x) = x^3 - 2x^2$

Lösung: Alle Summanden enthalten eine Potenz von x. Das x in der kleinsten Potenz kann ausgeklammert werden.

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x^2 \\ 0 &= x^2(x-2) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f lösen die Gleichung $0 = x^2$ oder $0 = x - 2$. Die Nullstellen lauten daher $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

(c) $f: f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Lösung: $0 = -x^2 + 4x - 3$ ist eine quadratische Gleichung. Damit sie mit der p-q-Formel gelöst werden kann, muss sie entsprechend umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4x - 3 && \mid : (-1) \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 && \mid p\text{-}q\text{-Formel } p = -4,\ q = 3 \\ x_{1,2} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - 3)} \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $x_1 = -1 \quad z_2 = -3$.

(d) $f: f(x) = 2x^4 + 10x^2 - 72$

Lösung: Als Potenzen von x kommen ausschließlich Vielfache der 2 vor. Es kann daher ein Substitutionsverfahren angewandt werden. Substituiere $z = x^2$ und $z^2 = x^4$ und ersetze entsprechende Terme:

$$2x^4 + 10x^2 - 72 = 2z^2 + 10z - 72\ .$$

Löse die *neue* Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= 2\cdot z^2 + 10z - 72 && \mid : 2 \\ 0 &= z^2 + 5z - 36 && \mid p\text{-}q\text{-Formel } p = 5,\ q = -36 \\ z_{1,2} &= -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - (-36)} \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $z_1 = 4 \quad z_2 = -9$. Rücksubstitution: $x_{1,2} = \pm\sqrt{z}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$. Dieses liefert

$$\begin{aligned} &x_1 = \sqrt{4} = 2 \\ &x_2 = -\sqrt{4} = -2 \\ &x_3 = \sqrt{-9} \quad \text{(keine Lösung, da Wurzel aus einer negativen Zahl.)} \\ &x_4 = -\sqrt{-9} \quad \text{(keine Lösung, da Wurzel aus einer negativen Zahl.)} \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

(e) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

Lösung: Es kann weder sinnvoll substituiert noch ausgeklammert werden. Es wird daher durch Ausprobieren nach einer Lösung gesucht, damit die Gleichung durch Polynomdivision vereinfacht werden kann.

Versuche $x = 1$. Es ist

$$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 1 - 7 + 14 - 8 = 0 \ .$$

Eine Nullstelle lautet also $x_1 = 1$.

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \big) : \big(x - 1 \big) = x^2 - 6x + 8 \\
\underline{-x^3 \ + x^2} \\
\qquad \ -6x^2 + 14x \\
\qquad \ \ \underline{6x^2 \ - 6x} \\
\qquad \qquad \quad \ 8x - 8 \\
\qquad \qquad \ \underline{-8x + 8} \\
\qquad \qquad \qquad \quad 0
\end{array}
$$

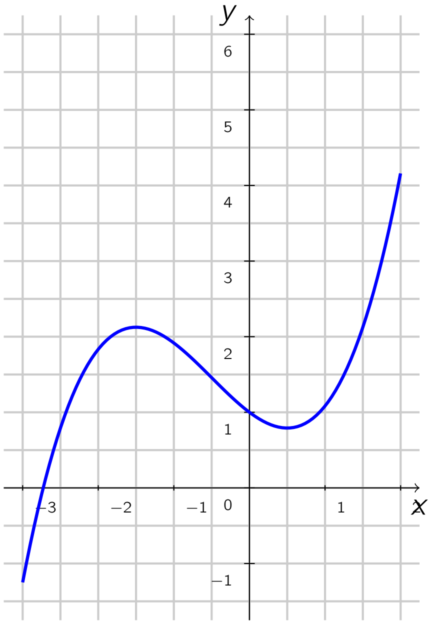
Bestimme die restlichen Nullstellen von f, indem die Gleichung $0 = x^2 - 6x + 8$ gelöst wird.

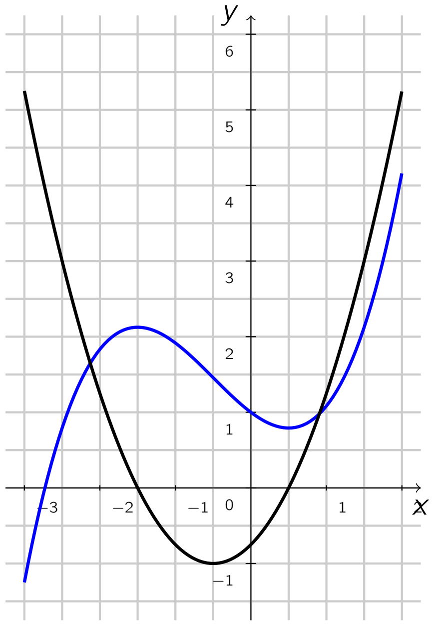
$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 - 6x + 8 && \mid p\text{-}q\text{-Formel } p = -6,\ q = 8 \\
x_{2,3} &= -\tfrac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 - 8)}
\end{aligned}
$$

Die Lösungen lauten $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

Aufgabe 2:
Zu sehen ist der Graph der Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'.

Lösung





Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die charakteristischen Punkte (y-Abschnitt, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte) des Graphen der Funktion

$$f : f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \ .$$

Sie dürfen ohne Herleitung folgende Information benutzen:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-4)^2 \cdot (x-1) \ .$$

Lösung:

- y-Abschnitt: Der Graph von f schneidet die y-Achse an der Stelle $(0|f(0))$. Es gilt

  $$(0)^3 - 9 \cdot (0)^2 + 24 \cdot (0) - 16 = -16 \ .$$

  Der y-Achsenabschnitt liegt bei $(0| -16)$.

- Nullstellen: Gesucht werden x-Werte mit $f(x) = 0$. An dieser Stelle ist es einfacher die Form $f(x) = (x-4)^2 \cdot (x-1)$ zu benutzen.

  $$0 = (x-4)^2(x-1)$$

  Dies ist genau dann erfüllt, wenn $(x-4)^2 = 0$ oder $(x-1) = 0$ ist. Damit können die Nullstellen für $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ abgelesen werden.

- Extremstellen: Es wird die Ableitungsfunktion f' gebildet. Es gilt

  $$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \ .$$

  - Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$. Es ist

    $$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 24 && | : 3 \\ 0 &= x^2 - 6x + 8 && |p\text{-}q\text{-Formel } p = -6 \ q = 8 \\ x_{1,2} &= -\tfrac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 - 8} \end{aligned}$$

    Damit ist $x_1 = 4$ und $x_2 = 2$.

  - Hinreichendes Kriterium. Es wird überprüft, ob $f''(x_1) \neq 0$ und $f''(x_2) \neq 0$ gilt. Die zweite Ableitung von f hat folgende Funktionsgleichung

    $$f''(x) = 6x - 18 \ .$$

    Damit ist

    $$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \quad \rightarrow \text{ Tiefpunkt}$$

    und

    $$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 6 \quad \rightarrow \text{ Hochpunkt.}$$

  - Die Koordinaten der Extremstellen:

    $$\begin{aligned} f(2) &= (2)^3 - 9 \cdot (2)^2 + 24 \cdot 2 - 16 = 4 && \rightarrow \text{HP}(2|4) \\ f(4) &= (4)^3 - 9 \cdot (4)^2 + 24 \cdot 4 - 16 = 0 && \rightarrow \text{TP}(4|0) \end{aligned}$$

- Wendestellen

– Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$. Es ist

$$f''(x) = 6x - 18$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 18 && \mid +18 \\ 18 &= 6x && \mid :6 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

– Hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$. Es ist

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \quad \rightarrow \text{ Wendepunkt}$$

– Koordinaten des Wendepunktes

$$f(3) = (3)^3 - 9 \cdot (3)^2 + 24 \cdot 3 - 16 = 2 \rightarrow \text{WP}(2|2)$$

Aufgabe 4:
Die Funktion f hat eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Die Wendetangente von f berührt den Graphen von f im Punkt $W(0|1)$ und hat die Steigung $m = -4$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

Lösung: Eine allgemeine Funktionsgleichung von f wird uns in der Aufgabenstellung mitgeteilt. Diese lautet

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \ .$$

Die Aufgabe ist, die Zahlen b, c und d zu bestimmen. Eine Wendetangente ist eine Tangente, die den Graphen einer Funktion in dem Wendepunkt berührt. Wir können nun folgende Informationen entnehmen.

- Der Punkt $W(0|1)$ liegt auf dem Graphen von f, da $W(0|1)$ ein Wendepunkt ist. D. h. $f(0) = 1$.
- Die Steigung der Tangenten am Punkt $W(0|1)$ ist $m = -4$. D. h. $f'(0) = -4$, da die Ableitungsfunktion uns die Steigung in einem beliebigen Punkt einer ganzrationalen Funktion angibt.
- Da $W(0|1)$ ein Wendepunkt ist, ist $f''(0) = 0$ (notwendige Bedingung für einen Wendepunkt).

Wir brauchen also die erste und zweite Ableitung von f. Diese lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3x^2 + bx + c \\ f''(x) &= 6x + b \end{aligned}$$

Nun können wir ein Gleichungssystem aufstellen, um b, c und d zu bestimmen. Aus $f(0) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ 1 &= d \end{aligned}$$

Aus $f'(0) = -4$ folgt

$$\begin{aligned} -4 &= 3 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ -4 &= c \end{aligned}$$

Aus $f''(0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 6 \cdot 0 + b \\ 0 &= b \end{aligned}$$

Hier können wir $b = 0$, $c = -4$ und $d = 1$ direkt ablesen. Die Funktionsgleichung von f lautet

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 \ .$$